Concours des 26, 27 et 28 mai 1986 d'admission en 1ère année à l'INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

***

MATHÉMATIQUES

(Options M.P.T.)

(à distribuer aux candidats)

*)

PROBLEME N° I

1°) On appelle E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\mathbb{C}_{2n}[X]$, des polynômes à une indéterminée X et à coefficients complexes dont le degré est au plus égal à 2n. Soit p un entier naturel non nul et a un complexe, on pose alors :

$\forall P \in E$, $\phi(P)(X) = (p^2 - X^2) P'(X) + 2(nX + a) P(X)$, où P' est le polynôme dérivée de P.

Vérifier que ϕ est un endomorphisme de E.

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ. ϕ est-il diagonalisable ? ϕ est-il inversible ? (Les réponses à ces deux questions devront être brièvement justifiées).

Utiliser les résultats précédents pour montrer l'existence d'une matrice carrée d'ordre 2n + 1 dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1 et dont les valeurs propres sont les nombres 2k + 1 (avec $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$).

2°) n est un entier supérieur ou égal à 2.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont 2n complexes vérifiant :

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

De plus $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ sont n - 1 complexes 2 à 2 distincts tels que :

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} b_i .$$

On pose $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$ et $Q(X) = \prod_{i=1}^{n-1} (X - b_i)$.

Montrer que la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{P(X)}{Q(X)}$ conduit à l'égalité :

$$(2) \qquad \frac{P(X)}{Q(X)} = X - a_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{X - b_i} ,$$

où les α_i sont des complexes qu'on exprimera en fonction de $P(b_i)$ et $Q'(b_i)$.

*)Note d'édition: il semble donc que les autres textes de ce recueil n'étaient pas à priori destinés aux candidats. Une enquête est en cours sur les raisons pour lesquelles ils ont été rendus public.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

3°) Les notations sont les mêmes qu'à la question précédente. On considère la matrice carrée M d'ordre n définie par :

$$M = \begin{bmatrix} b_1 & & 0 & & \alpha_1 \\ & b_2 & & & \alpha_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & b_{n-1} & \alpha_{n-1} \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & a_n \end{bmatrix}$$

Montrer, en utilisant la formule (2) que le polynôme caractéristique de M n'est autre que $(-1)^n P(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$.

4°) On considère $T = (t_{ij})$ une matrice inversible d'ordre $n - 1$ et $T^{-1} = (t'_{ij})$ son inverse. t_{ij} (resp t'_{ij}) est le coefficient de T (resp de T') situé à la $i^{ème}$ ligne et à la $j^{ème}$ colonne.

On appelle S la matrice d'ordre n ainsi définie :

$$\begin{cases} \forall (i, j) \in \{1, \ldots, n-1\}^2 & s_{ij} = t_{ij} \\ \forall i = 1, \ldots, n-1 & s_{in} = s_{ni} = 0 \\ \text{et} & s_{nn} = 1. \end{cases}$$

On pourra utiliser la notation suivante $S = \begin{pmatrix} T & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \cdots 0 & : & 1 \end{pmatrix}$

a - Montrer que les coefficients s'_{ij} de S^{-1} sont définis par :

$$\begin{cases} \forall (i, j) \in \{1, \ldots, n-1\}^2 & s'_{ij} = t'_{ij} \\ \forall i = 1, \ldots, n-1 & s'_{in} = s'_{ni} = 0 \\ \text{et} & s'_{nn} = 1 \end{cases}$$

b - On considère la matrice M définie à la question précédente.

Montrer que les coefficients M'_{ij} de la matrice $M' = SMS^{-1}$ vérifient : $m'_{nn} = a_n$ et $\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n-1\}$, m'_{ij} est le coefficient situé à la $i^{ème}$ ligne et à la $j^{ème}$ colonne de la matrice

$$T \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{n-1} \end{pmatrix} T^{-1}$$

Tournez la page S. V. P.

c - Calculer $\sum_{i=1}^{n-1} m'_{ii}$ (en fonction des b_i) ainsi que $\sum_{i=1}^{n} m'_{ii}$.

Quelles sont les valeurs propres de M' ?

5°) En déduire, par un raisonnement par récurrence, qu'il existe une matrice carrée A ayant $a_1, \ldots, a_n$ comme éléments diagonaux et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comme valeurs propres, si et seulement si l'égalité (1) est vérifiée.

PROBLEME N° 2

Ce problème étudie la convergence simultanée des trois suites réelles (a_n) (b_n) et (c_n) définies par les relations de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 + 2\, b_n\, c_n \\ b_{n+1} = b_n^2 + 2\, c_n\, a_n \\ c_{n+1} = c_n^2 + 2\, a_n\, b_n \end{cases} \quad , (a_o, b_o, c_o) \in \mathbb{R}^3 \ .$$

1°) j étant le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$, on pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_n = a_n + b_n + c_n \\ y_n = a_n + j\, b_n + j^2\, c_n \\ z_n = a_n + j^2\, b_n + j\, c_n \end{cases} .$$

a) Montrer que les trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) convergent dans $\mathbb{R}$ si et seulement si les trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) convergent dans $\mathbb{C}$. Exprimer alors les limites a, b et c de (a_n), (b_n) et (c_n) en fonction des limites x, y et z de (x_n), (y_n) et (z_n).

b) Déterminer les relations de récurrence permettant de calculer x_{n+1}, y_{n+1} et z_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n. Donner ensuite la relation de récurrence existant entre y_{n+2} et y_n et celle existant entre z_{n+2} et z_n.

2°) Etudier en fonction de x_o la convergence de la suite définie par :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} = x_n^2$, $x_o \in \mathbb{R}$. (On pourra par exemple établir que si $x_o \neq 0$ on a $\forall\, n \geq 1$, $x_n > 0$ et poser $\forall\, n \geq 1$ $X_n = \ln x_n$).

3°) Etude de la convergence d'une suite (u_n) définie par :

$$u_o \in \mathbb{C}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^4.$$

a - Déterminer les limites possibles de la suite (u_n).

b - Achever l'étude de la convergence de (u_n) lorsque $|u_o| \neq 1$.

On suppose dans les questions 3° c) et 3° d) qui suivent que $|u_o| = 1$ et que la suite (u_n) converge.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

c - Montrer l'existence d'une suite (α_n) dont le terme général α_n appartient à $]-\pi, \pi]$ et vérifie $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = e^{i\alpha_n}$. Prouver que cette suite (α_n) converge vers α où α appartient à l'ensemble $\left\{-\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

d - Etablir l'existence d'un unique entier relatif k_n tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} = 4\alpha_n + 2k_n\pi$. Déduire de ce qui précède que la suite (k_n) converge vers une limite k qu'on exprimera en fonction de α.

Montrer alors que la suite (k_n) est stationnaire à partir d'un certain rang N, puis que la suite (α_n) est également stationnaire à partir de ce même rang N.

e - En déduire qu'une condition nécessaire de convergence de (u_n) vers $e^{i\alpha}$ est : $\exists N \in \mathbb{Z}, \ 4^N\alpha_o - \alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Montrer enfin que cette condition est suffisante.

4°) Revenant aux suites (a_n), (b_n) et (c_n) et aux suites (x_n), (y_n) et (z_n), on pose $y_o = |y_o| \ e^{i\alpha_o}$ avec $-\pi < \alpha_o \leq \pi$. Déduire des résultats précédents une condition nécessaire et suffisante de convergence des suites (a_n), (b_n) et (c_n) portant sur $|x_o|$, $|y_o|$ et α_o. Déterminer alors a, b et c en fonction des valeurs de $|x_o|$, $|y_o|$ et α_o.

PROBLEME N° 3

On se place dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient A et B les points de coordonnées (a, 0) et (0, b), où a et b sont deux réels strictement positifs. On pose $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, et $a = c\cos\alpha$, $b = c\sin\alpha$ où $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

1°) On considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est

$x(t) = \frac{a}{2} + \frac{c}{2}\cos t \qquad y(t) = \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\sin t.$

Quelle est la nature de la courbe (C) ? Que représente-t-elle pour le triangle OAB ?

2°) Soit M(t) le point de (C) de paramètre t. On appelle P(t), Q(t) et R(t) les projections de M(t) sur AB, OB et OA. Montrer que P(t), Q(t) et R(t) appartiennent à une même droite $\Delta(t)$ dont on donnera une équation sous la forme :

$x\cos\phi + y\sin\phi = p(\phi, \alpha)$, où ϕ est fonction uniquement de t et α.

3°) Montrer que la famille des droites $\Delta(t)$ admet une enveloppe (H) dont on donnera une représentation paramétrique en fonction de t ou de ϕ.

4°) Soit (Γ) la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = \frac{c}{4}(2\cos\theta + \cos 2\theta) \\ y = \frac{c}{4}(2\sin\theta - \sin 2\theta) \end{cases} \qquad \text{où } \theta \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

Montrer que cette courbe est invariante par les rotations de centre O et d'angles $\pm\frac{2\pi}{3}$, qu'elle admet 3 axes de symétrie et qu'elle est tangente à un cercle de centre O en trois points distincts. Déterminer les points de rebroussement de (Γ) et donner l'allure de (Γ).

5°) Montrer que (H) se déduit de (Γ) par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\alpha}{3}$, suivie de la translation de vecteur $\frac{1}{4}(a\vec{i} + b\vec{j})$. Déduire de 4°) que (H) est tangente au cercle (C') circonscrit au triangle OA'B' où A' et B' sont les milieux des segments OA et OB. Construire sur une même figure (C), (C'), (H) ainsi qu'une droite $\Delta(t)$.